Géométrie projective
Examen

Les documents de cours sont autorisés. Les différentes parties sont indépendantes.

1 Cours

1. Pourquoi est-ce utile de manipuler des éléments à l'infini et qu'apporte la géométrie projective dans ce cadre ?

2. Rappeler brièvement le principe de dualité dans un espace projectif. Le théorème de Désargues s'énonce ainsi :

   ```
   Si deux triangles sont tels que
   les droites joignants
   leurs sommets homologues
   sont concourantes alors
   les points intersections
   des cotés homologues
   sont colinéaires.
   ```

   Quelle est la version duale de ce théorème ? On s'aidera pour cela d'un dessin.

3. Une transformation affine conserve-t-elle les coordonnées barycentriques (tout point P a pour coordonnées $\{\alpha_i\}$ telles que $P = \sum_i \alpha_i P_i, \quad \sum_i \alpha_i = 1$) ? justifiez votre réponse.

2 Bases de $\mathcal{P}^2$

Les coordonnées d'un point sont (x, y, z) dans une base où A, B, C sont les points de références et D le point unité. Elles deviennent (x', y', z') dans la base où A, B, D sont les points de références et C le point unité.

1. Exprimez les rapports x'/y', x'/z' et y'/z' en fonction de x, y et z.

2. Donnez la matrice de transformation de la première base dans une base où A, B, C et D ont pour coordonnées $(1, 1, -1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ et $(1, 1, 1)$ respectivement.

3 Transformations de $\mathcal{P}^2$

1. Montrez que les transformations $p \rightarrow p'$ de la forme:

$$\begin{pmatrix} \text{x'} \\ \text{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(\cos\alpha + y\sin\alpha) + a \\ c(-x\sin\alpha + y\cos\alpha) + b \end{pmatrix}$$

   sont les seules transformations affines qui laissent les distances $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ entre deux points p_1 et p_2 quelconques invariantes à un facteur d'échelle constant près, c'est à dire que les distances sont multipliées par le même facteur quel que soit les points considérés.

2. Dans une base projective de $\mathcal{P}^2$, les points cycliques I et J ont pour coordonnées $(x, y, z) = (7, 3, 0)$ et $(5, -5, 4)$ respectivement.

   (a) En quoi consiste une rectification affine dans ce cas ?

   (b) Trouvez le module de l'angle entre les droites d'équations $x + 4y = 0$ et $2z - 3x = 0$ dans cette base.