Géométrie projective
Examen

Les documents de cours sont autorisés. Les différentes parties sont indépendantes.

1 Cours

1. Expliquez le principe de dualité dans un espace projectif $\mathcal{P}^n$?
2. Démontrez qu'entre une base quelconque de $\mathcal{P}^n$ et la base canonique de $\mathcal{P}^n$, il existe une transformation linéaire de matrice A non singulière et définie à un facteur d'échelle près (le théorème 2 du cours).
3. En conséquence, démontrez que deux bases de $\mathcal{P}^n$ sont liées par une homographie (le théorème 3 du cours).
4. Soit $(x, y, w \neq 0)^t$ les coordonnées d'un point P de $\mathcal{P}^2$ dans un repère dans lequel la droite à l'infini a pour coordonnées $(0, 0, 1)^t$. Quelles sont les coordonnées Euclidiennes de P ?

2 Invariances

1. Démontrez la conservation du parallélisme par transformation affine.
2. Démontrez la conservation des distances et des angles par transformation Euclidienne (on se placera dans $\mathcal{P}^2$ ou $\mathcal{P}^3$ pour cela).
3. Démontrez la conservation du point intersection de deux droites par transformation projective.

3 Angles

La formule de Laguerre définie l'angle α entre deux droite l_1 et l_2 de $\mathcal{P}^2$ par :

$$\alpha = \frac{1}{2i} \log(\{l_1, l_2; l_I, l_J\}),$$

où $\{.\}$ représente le birapport et l_I, l_J sont les droites issues du points intersection de l_1 et l_2 et passant par les points cycliques I et J de coordonnées $(1, i, 0)^t$ et $(1, -i, 0)^t$ respectivement dans un repère Euclidien de $\mathcal{P}^2$:

1. Sachant que $\exp i\theta = \cos\theta + i\sin\theta$ et en utilisant la définition du birapport, montrez que la formule de Laguerre est vraie lorsque l_1 et l_2 sont parallèles, de même lorsque l_1 et l_2 sont orthogonales.

2. Exprimez le $cos\alpha$ en fonction de la partie réelle du birapport.

4 Absolu

L'absolu I et J forment une conique duale dégénérée de matrice :

$$C^*_\infty = IJ^t + JI^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

1. Que devient cette matrice par transformation projective H ?

2. On suppose que H est la transformation projective entre une base projective et une base Euclidienne de $\mathcal{P}^2$. Soit l_1 et l_2 les coordonnées homogènes de deux droites dans la base projective, exprimez le produit scalaire entre les directions Euclidiennes de l_1 et l_2 en fonction de l_1, l_2 et C^*_∞.

3. En déduire l'expression du $\cos$ de l'angle entre l_1 et l_2 en fonction de l_1, l_2 et C^*_∞ et donc quelle est la connaissance nécessaire pour mesurer des angles dans $\mathcal{P}^2$?