Master IVR **Année 2003/2004**

Examen de Géométrie algorithmique

Mardi 16 décembre de 14h00 à 16h00

(Durée : 2 heures)

Les exercices sont totalement indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

1 Vrai ou faux

On demande, pour chacune des propriétés (P1), (P2), (P3), (P4) et (P5) dont on trouvera l'énoncé ci-dessous, soit de donner une démonstration (aussi claire et concise que possible) de cette propriété, soit si la propriété n'est pas vérifiée, de donner un contre-exemple montrant qu'elle est fausse ; on s'attachera à donner des contre-exemples aussi simples que possibles (par ex. de "taille minimale"). Les 5 questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

Q1.1 Vrai ou faux :

Une triangulation d'un ensemble de points du plan est dite *centrée* si chaque triangle de la triangulation contient le centre de son cercle circonscrit.

(P1) Une triangulation centrée est une triangulation de Delaunay.

Q1.2 Vrai ou faux :

Une triangulation de poids minimal d'un ensemble de points E du plan minimise la somme des longueurs des arêtes.

(P2) Une triangulation de poids minimal est une triangulation de Delaunay.

Q1.3 Vrai ou faux :

(P3) Tout polygone ayant un nombre pair de sommets peut être découpé à l'aide de diagonales en quadrilatères convexes.

Q1.4 Vrai ou faux :

(P4) Tout polygone ayant un nombre pair de sommets peut être découpé à l'aide de diagonales en quadrilatières.

Q1.5 Vrai ou faux :

(P5) n cercles comportent $O(n)$ points d'intersection

2 Algorithme par balayage

Le but de cet exercice est de proposer un algorithme par balayage pour déterminer si un ensemble de n segments sont deux à deux d'intérieurs disjoints. Pour éviter les cas particuliers, nous supposerons que les extrémités des segments sont disjoints et que deux extrémités ne se trouvent pas sur la même verticale. On suppose que l'on dispose de la fonction suivante :

- LEFTOF(a, b, c) // Renvoie vrai ssi le point c est à gauche de la droite orientée allant de a vers b.
  // On dit encore que le triplet (a, b, c) est un tour gauche.

Q2.1 Proposer une implémentation de la fonction LEFTOF(a, b, c).

Q2.2 Comment tester si deux segments $[xy]$ et $[uv]$ s'intersectent ?

Q2.3 Ecrire un algorithme par balayage qui détermine si deux segments parmi n segments s'intersectent. Illustrer sur la figure 2 le sens du balayage choisi et quand est-ce que votre algorithme s'arrête.

Q2.4 Faire une analyse propre du coût en temps de votre algorithme.

3 Diagramme de puissance

On appelle puissance d'un point x par rapport au cercle $C = (p, r)$ de centre p et de rayon r la quantité :

$$\pi_C(x) = \|x - p\|^2 - r^2$$

Q3.1 Que peut-on dire de la quantité $\pi_C(x)$ si le point x se trouve à l'extérieur, sur ou à l'intérieur du cercle C ? Donner une interprétation géométrique de la quantité $\pi_C(x)$ lorsque x se trouve à l'intérieur du cercle C et lorsque x se trouve à l'extérieur du cercle C.

On appelle médiatrice des cercles C_1 et C_2 l'ensemble des points ayant la même puissance par rapport aux cercles C_1 et C_2.

Q3.2 Quelle équation possède la médiatrice de deux cercles ? Tracer la médiatrice des différents cercles de la figure 3.

Soit $x \in \mathbb{R}^2$, un point du plan. On dit que le triangle abc se trouve devant le triangle uvw s'il existe une demi-droite d'origine x et intersectant abc avant d'intersecter uvw à partir de x. Nous écrivons $abc \prec uvw$. Un cycle est un ensemble de triangles t_1, t_2, $\ldots$, t_n tels que

$$t_1 \prec t_2 \cdots \prec t_n \prec t_1$$

Q3.3 Montrer que les triangles de la figure 4 possèdent un cycle.

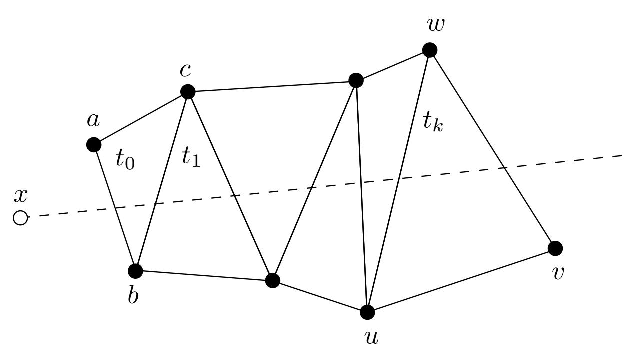

Figure 1: Séquence de triangles entre abc et uvw intersectés par une demi-droite d'origine x.

On se propose de montrer que la triangulation de Delaunay ne possède pas de cycles. Pour cela, on considère deux triangles de Delaunay abc et uvw tels que $abc \prec uvw$ et une demi-droite d'origine x intersectant abc avant d'intersecter uvw (voir Figure 1). On note t_0, t_1, $\ldots$, t_k la séquence de triangles de Delaunay tels que :

$$abc = t_0 \prec t_1 \prec \ldots \prec t_k = uvw$$

On note $\pi_i(x)$ la puissance du point x par rapport au cercle circonscrit au triangle t_i.

Q3.4 Montrer que $\pi_i(x) < \pi_{i+1}(x)$ pour $0 \leq i \leq k - 1$.

Q3.5 En déduire que la triangulation de Delaunay ne possède pas de cycles.

4 Diagramme de Voronoï pour la distance d_∞

La distance d_∞ et la distance euclidienne d_2 entre deux points $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ sont définies par :

- $d_\infty(a, b) = \max(|b_1 - a_1|, |b_2 - a_2|)$
- $d_2(a, b) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble fini de points du plan. Le diagramme de Voronoï de E pour la distance d_k, $k \in \{2, \infty\}$ est noté $\mathrm{Vor}_k(E)$.

Q4.1 Quelle est la médiatrice $\mathcal{M}_\infty(a, b)$ des points a et b pour la distance d_∞. On distinguera le cas où les points a et b se trouvent sur la même horizontale ou sur la même verticale. Tracer la médiatrice pour les différentes positions des points a et b sur la figure 5.
Indication : Les points à une distance r du point a pour la distance d_∞ sont les points du carré centré en a, dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées et de demi-côté r.

Q4.2 Montrer que les régions de Voronoï pour la distance d_∞ sont des ensembles étoilés. En déduire que les régions de Voronoï pour la distance d_∞ sont connexes.
Rappel : Une région V du plan est un étoilé s'il existe un point c de V tel que pour tout point x de V, le segment $[cx]$ est inclus dans V.

Q4.3 Les régions de Voronoï pour la distance d_∞ sont-elles convexes ?

On dira par la suite que les points de E sont en position d_∞-générale s'il n'y a pas deux points de E se trouvant sur la même horizontale ou la même verticale et si quatre points de E ne se trouvent pas sur le bord du même carré ayant ses côtés parallèles aux axes de coordonnées.

Q4.4 Que peut-on dire des arêtes du diagrammes de Voronoï $\mathrm{Vor}_\infty(E)$ si les points de E sont en position d_∞-générale ? Quelle est la forme des arêtes infinies ?

Q4.5 Quelle est la complexité du diagramme de Voronoï dans le cas où les points sont en position générale. Montrer que cette complexité peut être quadratique dans le cas où les points ne sont pas en position générale.

Nom : **ANNEXE**

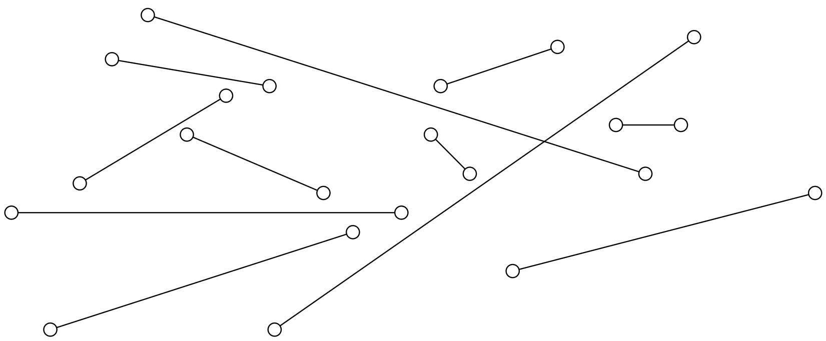

Figure 2: Ensemble de n segments.

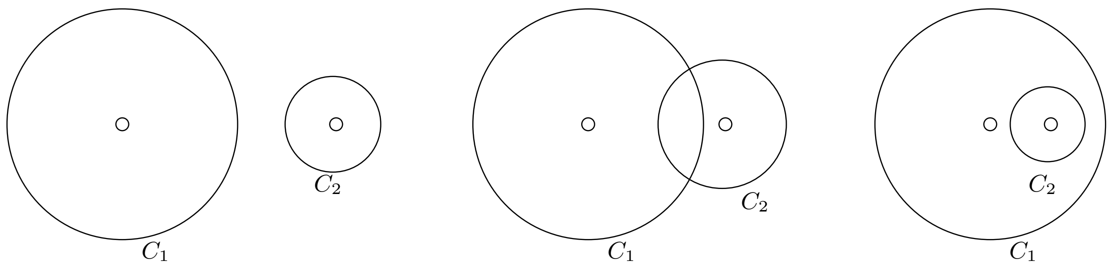

Figure 3: Exemples de cercles C_1 et C_2.

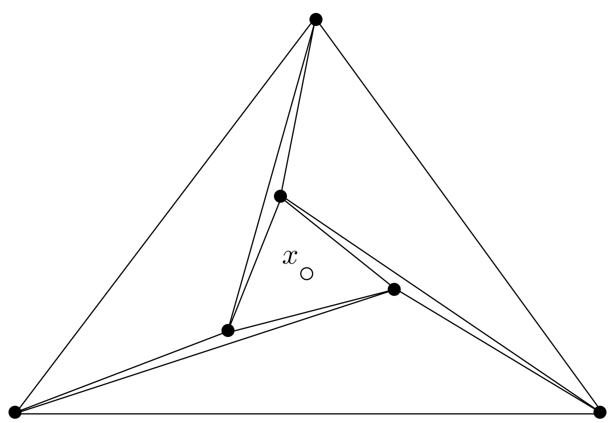

Figure 4: Triangles possédant un cycle.

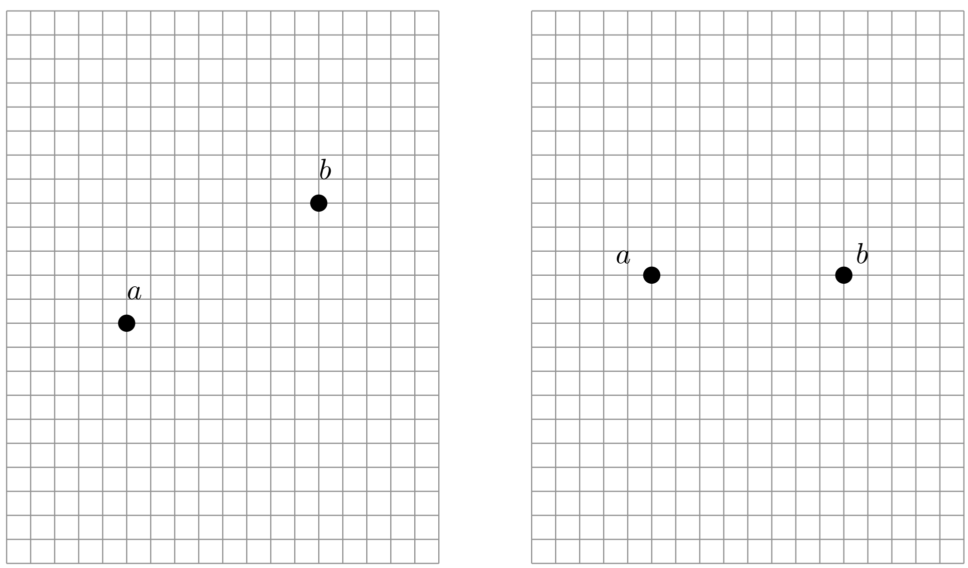

Figure 5: Différentes positions pour les points a et b.